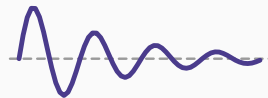


Analyse dynamique des modèles économiques

Chapitre 3 : L'ordre 1 linéaire, résolu des deux côtés



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Les deux équations

Étape 1 : l'équation sans second membre

Étape 2 : la solution particulière

Étape 3 : la solution complète

Les cas particuliers

Ce qu'il faut retenir

Les deux équations

Les deux problèmes du chapitre

Discret : $y_{t+1} = a y_t + b$, y_0 donné

Continu : $\dot{y} = a y + b$, $y(0)$ donné

Dans les deux cas a et b sont des constantes, et l'on cherche une formule explicite donnant la trajectoire.

Une même architecture en trois temps

1. Résoudre l'équation **sans second membre** ($b = 0$) : c'est la partie qui décrit la dynamique pure.
2. Trouver une solution **particulière** : ici, l'état stationnaire.
3. Additionner les deux, puis caler la constante sur la condition initiale.

Cette architecture vaut pour les deux langages, et elle vaudra encore à l'ordre 2 et pour les systèmes.
C'est la méthode du cours tout entier.

Étape 1 : l'équation sans second
membre

Résolution de $y_{t+1} = a, y_t$

On remonte de proche en proche :

$$y_1 = a y_0, \quad y_2 = a y_1 = a^2 y_0, \quad y_3 = a^3 y_0, \dots$$

$$y_t = y_0 a^t$$

C'est une **suite géométrique** de raison a .

Aucune technique, seulement de la patience

La solution s'obtient par simple itération. C'est le grand avantage pratique du temps discret : on peut toujours calculer numériquement, même quand aucune formule n'existe.

Le tableur fait cela tout seul : une colonne, une formule, on tire vers le bas.

Résolution de $\dot{y} = a, y$

On sépare les variables :

$$\frac{dy}{y} = a dt \implies \ln |y| = a t + C \implies |y| = e^C e^{at}$$

$$y(t) = y_0 e^{at}$$

La méthode de séparation des variables

Rassembler tous les y d'un côté, tous les t de l'autre, puis intégrer les deux membres. C'est la seule technique d'intégration exigée dans ce cours, et elle suffit à tout l'ordre 1.

Le passage de $\ln |y|$ à y absorbe le signe et la constante dans le seul y_0 .

Les deux briques élémentaires

$$y_t = y_0 a^t \quad \longleftrightarrow \quad y(t) = y_0 e^{at}$$

Puisque $a^t = e^{t \ln a}$, la correspondance exacte est

$$a_{\text{discret}} = e^{a_{\text{continu}}}$$

Le taux annuel et le taux continu, une dernière fois

$a_{\text{discret}} = 1,05$ correspond à $a_{\text{continu}} = \ln 1,05 = 0,0488$.

Un placement à 5 % actuariel équivaut à un placement à 4,88 % continu. Toute la finance de marché est écrite en taux continus, précisément parce que e^{rt} se manipule mieux que $(1+i)^t$.

Étape 2 : la solution particulière

L'état stationnaire fait l'affaire

Chercher une solution constante

On essaie $y_t = y^*$ constant, ou $y(t) = y^*$ constant.

Discret

$$y^* = a y^* + b$$

$$y^* = \frac{b}{1-a}, \text{ si } a \neq 1$$

Continu

$$0 = a y^* + b$$

$$y^* = -\frac{b}{a}, \text{ si } a \neq 0$$

Pourquoi c'est légitime

La théorie des équations linéaires dit : **solution générale = solution générale sans second membre + une solution particulière quelconque.**

« Quelconque » : n'importe laquelle fait l'affaire. Autant prendre la plus simple, et la plus simple est la constante. C'est aussi la plus intéressante économiquement, puisque c'est l'équilibre de long terme.

Étape 3 : la solution complète

Le résultat à connaître par cœur

Temps discret, pour $a \neq 1$:

$$y_t = y^* + (y_0 - y^*) a^t, \quad y^* = \frac{b}{1 - a}$$

Temps continu, pour $a \neq 0$:

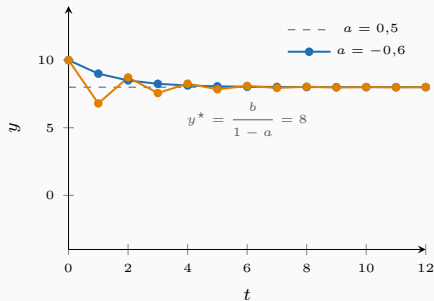
$$y(t) = y^* + (y_0 - y^*) e^{at}, \quad y^* = -\frac{b}{a}$$

La même phrase dans les deux cas

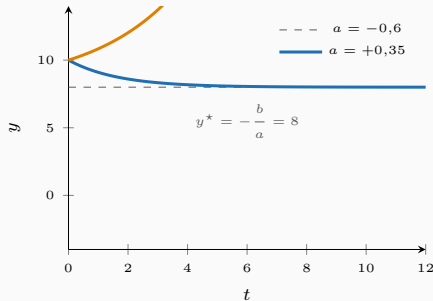
$$\text{trajectoire} = \underbrace{\text{équilibre de long terme}}_{y^*} + \underbrace{\text{écart initial}}_{y_0 - y^*} \times \underbrace{\text{facteur d'amortissement}}_{a^t \text{ ou } e^{at}}$$

L'écart initial ne disparaît pas : il est multiplié à chaque instant par le même facteur. Toute la question de la stabilité tient dans le comportement de ce facteur — chapitre 4.

$$y_{t+1} = a y_t + b \quad (\text{ici } b = 4, y_0 = 10)$$



$$y' = a y + b \quad (\text{ici } b = -4, y_0 = 10)$$



même architecture : **état stationnaire** + **écart qui s'amortit ou s'amplifie**
mais l'écart peut *changer de signe* à chaque pas en temps discret — jamais en temps continu

Un calcul complet, en discret

Le revenu national

$$Y_{t+1} = 0,8 Y_t + 200, \text{ avec } Y_0 = 400.$$

$$\text{Équilibre : } Y^* = \frac{200}{1 - 0,8} = 1000.$$

$$\text{Écart initial : } Y_0 - Y^* = 400 - 1000 = -600.$$

Trajectoire :

$$Y_t = 1000 - 600 \times 0,8^t$$

$$Y_1 = 1000 - 480 = 520, Y_5 = 1000 - 196,6 = 803,4, Y_{20} = 1000 - 6,9 = 993,1.$$

Ce que le calcul apprend au-delà du multiplicateur

Le multiplicateur keynésien annonce **1000**. Il ne dit **rien** du délai.

Le calcul dynamique, lui, chiffre ce délai : après cinq périodes, **67 %** du chemin est parcouru ; après vingt, **99 %**. Si la période est le trimestre, le plein effet d'une relance demande **cinq ans**.

C'est exactement le genre d'information qui manque à un décideur et que l'analyse dynamique fournit.

La version en temps continu

$\dot{Y} = -0,2 Y + 200$, avec $Y(0) = 400$.

Équilibre : $Y^* = -\frac{200}{-0,2} = 1000$. Le même.

Trajectoire :

$$Y(t) = 1000 - 600 e^{-0,2 t}$$

$Y(1) = 508,7$, $Y(5) = 779,3$, $Y(20) = 989,0$.

Comparer les deux colonnes

t	discret, $a = 0,8$	continu, $a = -0,2$
1	520,0	508,7
5	803,4	779,3
20	993,1	989,0

Les valeurs diffèrent, la **conclusion** est identique : même équilibre, même vitesse d'approche, même diagnostic économique. C'est le cas général quand a est positif en discret.

L'exact équivalent continu de $a = 0,8$ serait $\ln 0,8 = -0,223$; les deux colonnes coïncideraient alors aux arrondis près.

Les cas particuliers

Les deux cas dégénérés

	Discret, $a = 1$	Continu, $a = 0$
Équation	$y_{t+1} = y_t + b$	$\dot{y} = b$
Solution	$y_t = y_0 + b t$	$y(t) = y_0 + b t$
Comportement	croissance linéaire	croissance linéaire
y^*	n'existe pas	n'existe pas

Le seul cas où les deux formules coïncident exactement

Ici, discret et continu donnent **le même résultat, au sens strict** : une droite.

C'est aussi la frontière entre convergence et divergence. En économétrie, cette situation porte un nom : la **marche aléatoire avec dérive**, $y_t = y_{t-1} + b + \varepsilon_t$. Le chapitre 12 y revient.

Un cas économiquement important

$a = 1$ signifie que le choc d'aujourd'hui se transmet **intégralement et pour toujours**. Aucun retour à l'équilibre : le niveau atteint devient le nouveau point de départ.

C'est la propriété qui distingue, en macroéconomie, un choc **transitoire** d'un choc **permanent**.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Même méthode en trois temps : sans second membre, puis solution particulière, puis condition initiale.
2. Sans second membre : $y_0 a^t$ en discret, $y_0 e^{at}$ en continu — deux écritures du même objet.
3. Solution particulière : l'**état stationnaire**, $b/(1 - a)$ ou $-b/a$.
4. Formule complète : $y^* + (y_0 - y^*) \times \text{facteur d'amortissement}$.
5. Cas dégénérés $a = 1$ et $a = 0$: croissance linéaire, pas d'équilibre.

La suite

On sait résoudre. On ne sait pas encore **si la trajectoire converge**, ni comment.

C'est le chapitre 4 — et c'est là que les deux langages cessent de dire la même chose.