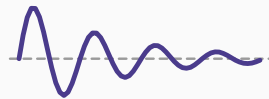


Analyse dynamique des modèles économiques

Chapitre 10 : Le non linéaire, et le chaos



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Renoncer à la formule

Les équilibres

La linéarisation

Le modèle logistique

Le chaos

La leçon du face à face

Ce qu'il faut retenir

Renoncer à la formule

Les deux équations du chapitre

Discret : $y_{t+1} = f(y_t)$

Continu : $\dot{y} = f(y)$

où f est une fonction quelconque, non linéaire.

Ce qu'on abandonne

Il n'existe **aucune formule générale**. On ne saura pas écrire y_t en fonction de t .

Ce n'est pas un aveu d'impuissance passager : on démontre que ces solutions n'ont, en général, aucune expression analytique.

Ce qu'on cherche à la place

1. Les **équilibres** : les valeurs qui se reproduisent.
2. Leur **stabilité locale** : que se passe-t-il si l'on s'en écarte un peu ?
3. Le **comportement global**, lu sur le diagramme du chapitre 5.

Ces trois questions ont des réponses complètes — et ce sont celles qui intéressent l'économiste.

Pourquoi tout modèle sérieux est non linéaire

Une fonction de production a des rendements décroissants : $f(k) = k^{0,5}$. Une population sature : elle ne peut pas croître indéfiniment. Un prix ne peut pas être négatif. Une propension à consommer diffère selon le niveau de revenu.

La linéarité est une approximation de travail, pas une propriété du monde.

Les équilibres

La condition d'équilibre

Discret

$$y^* = f(y^*)$$

point fixe de f

intersection avec la **bissectrice**

Continu

$$f(y^*) = 0$$

zéro de f

intersection avec l'**axe**

Une nouveauté : il peut y en avoir plusieurs

Une équation linéaire a **un** équilibre, ou aucun. Une équation non linéaire peut en avoir deux, trois, une infinité.

C'est un fait économique majeur : un modèle non linéaire peut avoir un équilibre de **pauvreté** et un équilibre de **prospérité**, et le point de départ décide vers lequel on converge.

Cette idée — les **équilibres multiples**, les trappes à pauvreté — est inaccessible à un modèle linéaire.

Deux équilibres

$$\dot{y} = y(1 - y)(y - 0,2).$$

Les zéros sont $y^* \in \{0 ; 0,2 ; 1\}$: trois équilibres.

Le diagramme de phase montre que 0 et 1 sont **stables**, tandis que 0,2 est **instable** : c'est un **seuil**. En dessous, on s'effondre vers 0; au-dessus, on converge vers 1.

La linéarisation

Approcher f par sa tangente

Au voisinage de $y^\star$, on remplace f par son développement au premier ordre :

$$f(y) \approx f(y^\star) + f'(y^\star) (y - y^\star)$$

En posant l'écart $u_t = y_t - y^\star$, le modèle devient **linéaire** :

Discret	Continu
$u_{t+1} \approx f'(y^\star) u_t$	$\dot{u} \approx f'(y^\star) u$

Le tour de force

On retombe exactement sur l'équation du chapitre 3, avec $a = f'(y^\star)$.

Toute la théorie linéaire redevient applicable — à condition de rester au voisinage de l'équilibre.

Le critère de stabilité locale

Discret	Continu
$ f'(y^*) < 1$: stable	$f'(y^*) < 0$: stable
$ f'(y^*) > 1$: instable	$f'(y^*) > 0$: instable
$ f'(y^*) = 1$: indéterminé	$f'(y^*) = 0$: indéterminé

C'est le critère du chapitre 5, mot pour mot

En discret : la courbe f coupe la bissectrice avec une pente **comprise entre -1 et 1** .

En continu : la courbe f coupe l'axe **en descendant**.

Rien n'a changé — sauf que f n'est plus une droite, donc la pente diffère d'un équilibre à l'autre. C'est précisément ce qui permet à un même modèle d'avoir des équilibres stables et d'autres instables.

Vérification sur l'exemple à trois équilibres

$f(y) = y(1 - y)(y - 0,2) = -y^3 + 1,2y^2 - 0,2y$, donc $f'(y) = -3y^2 + 2,4y - 0,2$.

y^*	$f'(y^*)$	Conclusion
0	-0,2	stable
0,2	+0,16	instable
1	-0,8	stable

Le calcul confirme la lecture graphique.

Local veut dire local

La linéarisation ne dit **rien** de ce qui se passe loin de l'équilibre. Elle ne dit pas jusqu'où s'étend le bassin d'attraction, ni ce qui arrive à une trajectoire partie de très loin.

Dans le modèle à trois équilibres, la linéarisation autour de 0 dit « stable » — mais elle ne dit pas que le bassin s'arrête à $0,2$. Il faut le diagramme de phase pour cela.

Analyse locale et analyse globale sont complémentaires; ni l'une ni l'autre ne suffit.

Le modèle logistique

Le face à face

Continu : $\dot{y} = r y \left(1 - \frac{y}{K}\right)$

Discret : $x_{t+1} = \mu x_t (1 - x_t)$

Croissance proportionnelle au niveau, freinée par la saturation.

Où on la rencontre

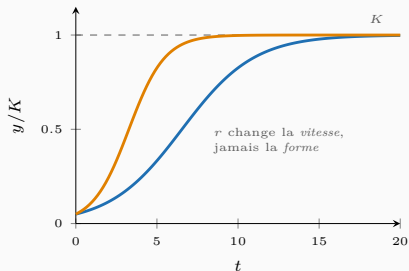
- Croissance d'une population limitée par ses ressources (Verhulst, 1838).
- **Diffusion d'une innovation** : elle démarre lentement, s'accélère, puis sature quand le marché est équipé.
- Adoption d'un produit, pénétration d'un marché, courbe d'apprentissage.

C'est le modèle de référence de toute croissance bornée.

Le cas continu : sans surprise

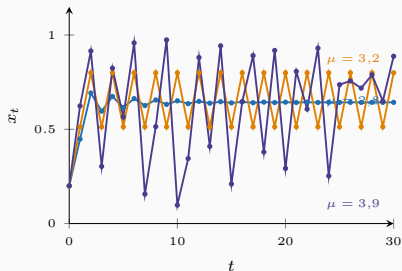
$$\text{temps continu : } y' = r y \left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

toujours une sigmoïde



$$\text{temps discret : } x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t)$$

la forme change avec μ



la même équation, discrétisée, engendre des dynamiques que le temps continu ne connaît pas :
point fixe, cycle de période 2, puis chaos

La solution explicite

C'est l'une des rares équations non linéaires qui se résout :

$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right) e^{-rt}}$$

C'est la fameuse courbe en S.

Les équilibres

$f(y) = ry(1 - y/K) = 0$ donne $y^* = 0$ et $y^* = K$.

$f'(y) = r - \frac{2ry}{K}$, donc $f'(0) = r > 0$: instable, et $f'(K) = -r < 0$: stable.

Et c'est tout

Quelle que soit la valeur de r , la trajectoire est une sigmoïde qui monte vers K . r change la **vitesse**, jamais la **forme**.

Le temps continu à une dimension ne réserve aucune surprise : c'est le théorème du chapitre 4, une trajectoire ne peut pas franchir son équilibre.

Le chaos

Les équilibres de la logistique discrète

$x^* = \mu x^*(1 - x^*)$ donne $x^* = 0$ et $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$.

$f'(x) = \mu(1 - 2x)$, donc au second équilibre

$$f'\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \mu(2/\mu - 1) = 2 - \mu$$

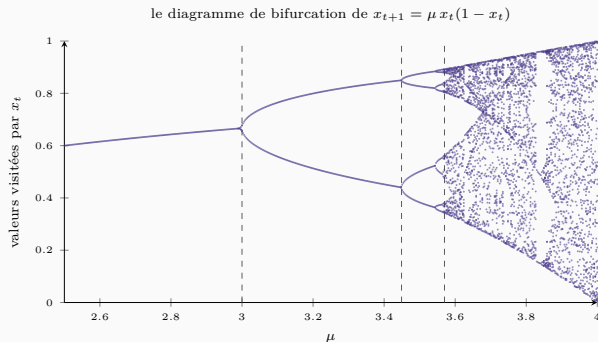
Stable si $|2 - \mu| < 1$, c'est-à-dire $1 < \mu < 3$.

Le seuil de 3

Pour μ légèrement supérieur à 3, l'équilibre devient instable. Mais la trajectoire ne part pas à l'infini : elle reste bornée dans $[0; 1]$.

Que fait-elle alors ? **Elle se met à alterner entre deux valeurs** : un cycle de période 2. Puis, à $\mu \approx 3,45$, entre quatre valeurs. Puis huit. Puis...

Le diagramme de bifurcation



une équation à un seul paramètre, parfaitement déterministe — et pourtant imprévisible.

Aucun équivalent en temps continu à une dimension.

C'est la différence la plus spectaculaire entre les deux représentations du temps.

$\mu = 3$: période 2

$\mu \simeq 3,45$: période 4

$\mu \simeq 3,57$: chaos

Le doublement de période

μ	Comportement
$1 < \mu < 3$	point fixe stable
$3 < \mu < 3,449$	cycle de période 2
$3,449 < \mu < 3,544$	cycle de période 4
$3,544 < \mu < 3,564$	période 8, puis 16, 32...
$\mu > 3,5699$	chaos

Chaos déterministe

Une trajectoire est **chaotique** lorsqu'elle est engendrée par une règle parfaitement déterministe, reste bornée, ne se répète jamais, et dépend de manière **extrêmement sensible** de sa condition initiale.

La sensibilité aux conditions initiales

Avec $\mu = 3,9$, partez de $x_0 = 0,2000$ et de $x_0 = 0,2001$. Les deux trajectoires restent indiscernables une quinzaine de périodes, puis divergent complètement.

Deux points de départ que rien ne distingue à la précision de la mesure conduisent à deux histoires sans rapport. La prévision à long terme est impossible, alors même que le modèle ne contient aucun hasard.

Ce que cela change pour l'économiste

Une série économique erratique n'est pas nécessairement la trace de chocs aléatoires. Elle peut être engendrée par un mécanisme **déterministe et parfaitement simple**.

Deux conséquences :

1. On ne peut pas conclure d'une série irrégulière que le monde est aléatoire.
2. La prévision de long terme peut être impossible **même avec un modèle exact et des données parfaites**.

La leçon du face à face

Ce que le temps discret peut et que le temps continu ne peut pas

Dimension	Temps continu	Temps discret
1	convergence monotone seulement	oscillations, cycles, chaos
2	oscillations, cycles limites	tout ce qui précède
3 et plus	chaos possible	chaos possible

Pourquoi cette dissymétrie

Une trajectoire continue à une dimension est prisonnière de l'axe réel : elle avance sans jamais pouvoir sauter par-dessus un équilibre. Cette contrainte de continuité interdit toute complexité.

Une suite, elle, **saute**. Elle n'a aucune obligation de passer par les valeurs intermédiaires. C'est cette liberté qui engendre cycles et chaos.

Discrétiser n'est pas approximer : c'est changer la nature de ce qui peut arriver.

La conséquence méthodologique

Un modèle théorique écrit en temps continu, puis simulé en temps discret avec un pas mal choisi, peut produire des cycles ou du chaos **qui n'existent pas dans le modèle d'origine.**

C'est un piège classique de la simulation numérique. Le pas de discrétisation n'est pas un détail technique : il fait partie du modèle.

Ce qu'il faut retenir

Six points

1. Non linéaire : pas de formule. On cherche les **équilibres** et leur **stabilité locale**.
2. Il peut y avoir **plusieurs équilibres** — d'où les trappes à pauvreté et les seuils.
3. **Linéariser** : remplacer f par sa tangente, avec $a = f'(y^*)$, puis appliquer la théorie linéaire.
4. Critère : $|f'(y^*)| < 1$ en discret, $f'(y^*) < 0$ en continu.
5. La logistique **continue** donne toujours une sigmoïde; la logistique **discrète** donne point fixe, cycles, puis chaos.
6. Le **chaos déterministe** rend la prévision de long terme impossible sans qu'aucun hasard n'intervienne.

La suite

Le chapitre 11 met tout cela à l'épreuve sur quatre modèles économiques classiques, traités en face à face.