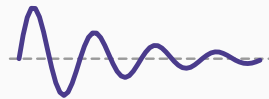


Chapitre 11 : Quatre modèles classiques



Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Le programme

La toile d'araignée

Harrod-Domar

Le modèle de Solow

Samuelson, en résumé

Ce qu'il faut retenir

Le programme

Quatre modèles, une même méthode

Les quatre		
Modèle	Question	Ordre
Toile d'araignée	pourquoi les prix agricoles oscillent-ils ?	1, discret
Harrod-Domar	à quel rythme une économie peut-elle croître ?	1
Solow	pourquoi la croissance s'essouffle-t-elle ?	1, non linéaire
Samuelson	d'où viennent les cycles ?	2, discret

La méthode, toujours la même

1. Écrire les hypothèses de comportement.
2. Les combiner en **une** équation dynamique.
3. Chercher l'équilibre.
4. Étudier la stabilité.
5. **Interpréter.**

Aucune technique nouvelle dans ce chapitre : tout a été vu. Ce qui est nouveau, c'est le passage de l'énoncé littéraire à l'équation — et c'est là que se trouve la vraie difficulté.

La toile d'araignée

Le retard de production agricole

Un agriculteur décide en mars ce qu'il plantera, et vendra en septembre. Il décide donc sur le **prix de la campagne précédente**.

$$\text{demande : } q_t^d = a - b p_t \qquad \text{offre : } q_t^s = c + d p_{t-1}$$

L'équilibre du marché à chaque période, $q_t^d = q_t^s$, donne

$$p_t = \frac{a - c}{b} - \frac{d}{b} p_{t-1}$$

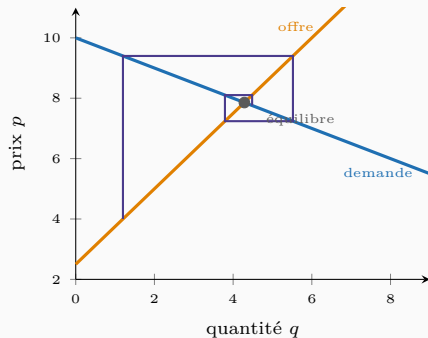
Un coefficient négatif, par construction

Le coefficient est $-d/b$: il est **nécessairement négatif**, puisque b et d sont positifs.

Or le chapitre 4 nous a appris qu'un coefficient négatif engendre des **oscillations**. Le cycle des prix agricoles n'est donc pas un accident : il est inscrit dans la structure du marché avec délai.

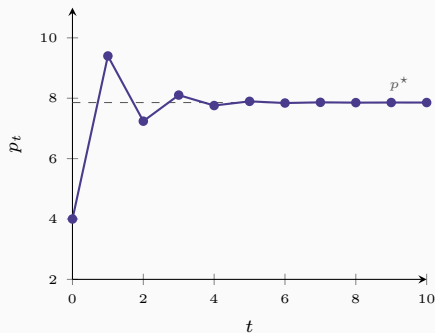
Le diagramme

le marché avec retard de production
offre décidée sur le prix de la veille



la suite des prix

$$p_t = 11 - 0,4 p_{t-1}$$



la toile d'araignée converge si l'offre réagit **moins** que la demande —
ici $|-0,4| < 1$: oscillations amorties. Un phénomène propre au **temps discret**.

Le résultat

$$\left| \frac{d}{b} \right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad d < b$$

L'offre doit être moins sensible au prix que la demande.

Un exemple chiffré

$a = 20, b = 2, c = -2, d = 0,8 : p_t = 11 - 0,4p_{t-1}.$

$p^* = \frac{11}{1,4} = 7,86.$ Coefficient $-0,4$: oscillations **amorties**.

En partant de $p_0 = 4$: 9,4; 7,24; 8,10; 7,76; 7,90; 7,84 ...

Ce que le modèle explique

Trois régimes selon d/b :

- $d < b$: la toile se resserre, le marché se stabilise.
- $d = b$: cycle permanent — le fameux **cycle du porc**, observé en Allemagne dans les années 1920.
- $d > b$: divergence, le marché s'effondre ou s'emballe.

Et la conclusion de politique publique est immédiate : **stabiliser le prix, c'est réduire d** — par des contrats à terme, des prix garantis, des stocks régulateurs. Toute la politique agricole commune tient dans cette inégalité.

Le point de méthode

Ce modèle **n'existe qu'en temps discret**. Sa version continue, sans délai, converge sans jamais osciller : le phénomène disparaîtrait.

C'est l'illustration la plus nette du chapitre 4 : ici, le choix du temps n'est pas une commodité, **il est le modèle**.

Harrod-Domar

Les hypothèses

- Épargne proportionnelle au revenu : $S_t = s Y_t$.
- Investissement proportionnel à l'accroissement de production requis : $I_t = v (Y_{t+1} - Y_t)$, où v est le coefficient de capital.
- Équilibre : $S_t = I_t$.

$$s Y_t = v (Y_{t+1} - Y_t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_{t+1} = \left(1 + \frac{s}{v}\right) Y_t}$$

Le face à face

Discret

$$Y_{t+1} = \left(1 + \frac{s}{v}\right) Y_t$$

$$Y_t = Y_0 \left(1 + \frac{s}{v}\right)^t$$

Continu

$$\dot{Y} = \frac{s}{v} Y$$

$$Y(t) = Y_0 e^{(s/v)t}$$

Le taux de croissance garanti

$$g^w = \frac{s}{v}$$

Avec $s = 0,20$ et $v = 4$: $g^w = 5\%$ par an. C'est le seul rythme auquel l'économie peut croître sans accumuler ni pénurie ni surcapacité.

Pourquoi ce modèle est instable

Rien ne garantit que le taux effectif coïncide avec g^w . Et s'il s'en écarte, l'écart s'**amplifie** : croître trop vite crée une pénurie de capacité, donc encore plus d'investissement, donc encore plus vite.

Harrod parlait du **fil du rasoir** : l'équilibre existe mais il est instable, et rien ne ramène l'économie dessus.

Le point faible du modèle

s et v sont deux paramètres **fixés de l'extérieur**. Le taux garanti n'a donc aucune raison d'être égal au taux naturel — la croissance de la population plus le progrès technique.

Toute la question de la croissance devient : peut-on faire varier v ? Si le coefficient de capital s'ajuste, l'économie peut se corriger d'elle-même.

C'est exactement la réponse de Solow, et c'est pourquoi le modèle suivant a remplacé celui-ci.

Le modèle de Solow

Les hypothèses, 1956

- Fonction de production à rendements décroissants : $Y = F(K, L)$, soit par tête $y = f(k)$ avec $f(k) = k^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.
- Épargne : sY , entièrement investie.
- Le capital se déprécie au taux δ , la population croît au taux n .

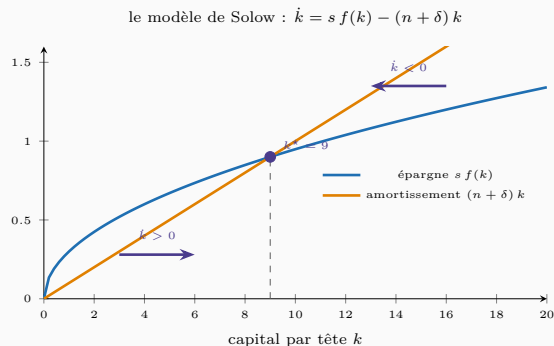
$$\dot{k} = s f(k) - (n + \delta) k$$

Lire l'équation

Le capital par tête augmente de ce qui est épargné et diminue de ce qu'il faut pour remplacer l'usure et pour équiper les nouveaux venus.

C'est une équation d'ordre 1, **autonome et non linéaire** : elle relève du chapitre 10.

Le diagramme (suite 2)



tant que l'épargne dépasse l'amortissement, le capital s'accumule ; au-delà de k^* , il se déprécie plus vite qu'il ne se reconstitue.

Équilibre stable, atteint sans oscillation — c'est la signature du temps continu.

La version discrète du même modèle, elle, peut osciller.

L'équilibre

$s k^\alpha = (n + \delta)k$ donne

$$k^\star = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Avec $s = 0,3$, $n + \delta = 0,1$, $\alpha = 0,5$: $k^\star = 3^2 = 9$, et $y^\star = 3$.

La stabilité, par linéarisation

$g(k) = s k^\alpha - (n + \delta)k$, donc $g'(k) = s \alpha k^{\alpha-1} - (n + \delta)$.

En $k^\star = 9$: $g'(9) = 0,3 \times 0,5 \times 9^{-0,5} - 0,1 = 0,05 - 0,1 = -0,05 < 0$.

Équilibre stable, et la demi-vie est $\frac{\ln 0,5}{-0,05} = 13,9$ années.

Les trois enseignements du modèle

1. **La croissance par accumulation s'épuise.** Les rendements décroissants font que $sf(k)$ finit toujours par être rattrapé par $(n + \delta)k$.
2. **Un pays pauvre rattrape un pays riche** — la convergence — car il est loin de son k^* et croît donc plus vite.
3. **Épargner davantage relève le niveau, pas le taux de croissance de long terme.** Doubler s multiplie k^* par 4 ici, mais à terme la croissance par tête redevient nulle.

D'où la conclusion : la croissance durable ne peut venir que du **progrès technique**, exogène dans ce modèle. C'est ce vide que la théorie de la croissance endogène a entrepris de combler.

La version discrète

$$k_{t+1} = \frac{s f(k_t) + (1 - \delta)k_t}{1 + n}$$

Même équilibre, même diagramme. Mais avec une épargne très élevée et une dépréciation forte, la pente au point fixe peut descendre sous -1 : le modèle discret **peut osciller, voire diverger**, là où le continu converge toujours.

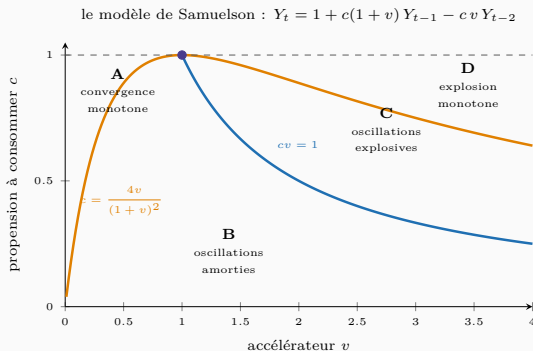
Samuelson, en résumé

Le modèle du chapitre 8

$$Y_t = 1 + c(1 + v) Y_{t-1} - c v Y_{t-2}$$

Stabilité $\iff c v < 1$. Racines complexes $\iff c < \frac{4v}{(1+v)^2}$.

Le rappel (suite)



la courbe orange sépare les racines réelles des racines complexes ; la courbe bleue sépare le stable de l'instable.

Quatre régimes au lieu des deux du temps continu — et l'économie bascule de l'un à l'autre par un simple changement de paramètre.

Ce que les quatre modèles ont en commun

Le bilan de la méthode

Modèle	Équation	Résultat
Toile d'araignée	ordre 1, coefficient < 0	oscillations; stables si $d < b$
Harrod-Domar	ordre 1, coefficient > 1	croissance à s/v , instable
Solow	ordre 1 non linéaire	équilibre stable, croissance qui s'épuise
Samuelson	ordre 2	quatre régimes selon c et v

Aucun de ces modèles ne demande plus que ce que contient ce cours. Ce qu'ils demandent, c'est de savoir traduire un énoncé économique en équation — puis de savoir relire le résultat en économie.

Le conseil pour l'examen, et pour la suite

Trois questions à se poser devant tout modèle dynamique :

1. **Quelle est la variable d'état ?** Celle dont on suit l'évolution.
2. **Quelle est la loi de mouvement ?** Une seule équation, obtenue en substituant les hypothèses.
3. **Quel est le signe de la pente à l'équilibre ?** Elle donne stabilité et oscillations d'un coup.

Ces trois questions suffisent à traiter n'importe quel modèle du programme.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. **Toile d'araignée** : le délai de production engendre des oscillations; stables si l'offre est moins élastique que la demande.
2. **Harrod-Domar** : croissance garantie s/v , équilibre instable — le fil du rasoir.
3. **Solow** : les rendements décroissants créent un équilibre **stable**; la croissance par accumulation s'épuise.
4. **Samuelson** : l'ordre 2 engendre des cycles endogènes, sans cause extérieure.
5. La difficulté n'est jamais la technique : c'est la **mise en équation** et la **relecture économique**.

La suite

Tous ces modèles sont **déterministes** : même point de départ, même histoire. Or aucune série économique observée ne ressemble à cela.

Le chapitre 12 ajoute le hasard — et ouvre la porte de l'économétrie et de la finance.