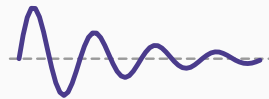


## Chapitre 1 : Deux façons de représenter le temps



Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Prérequis

L'objet du cours

Suite ou fonction

Comment mesurer une variation

Le tableau de correspondance

Ce qu'il faut retenir

## Prérequis

---

# Ce que ce cours suppose acquis

## Les cours qui précèdent

*Analyse mathématique* et *Algèbre linéaire*.

## Les notions mobilisées

Dériver et intégrer. Résoudre une équation du second degré, **y compris à racines complexes**. Calculer les valeurs propres d'une matrice  $2 \times 2$ .

Ces trois points sont employés sans être redémontrés : ce sont eux qui décident de la nature d'une trajectoire.

### Repris depuis le début

Les équations aux différences et les équations différentielles sont construites ici, ainsi que la notion de stabilité.

**Les nombres complexes ne sont pas un ornement** : ce sont eux qui produisent les oscillations, et le cours explique pourquoi avant de s'en servir.

## L'objet du cours

---

## L'objet de ce cours

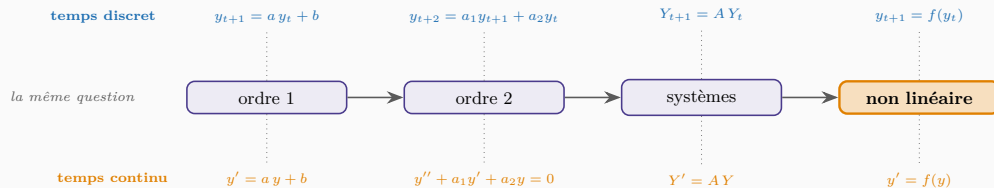
Un modèle économique **dynamique** décrit comment une grandeur se transforme d'une période à la suivante : un capital, une population, un prix, un revenu national.

La question est toujours la même : **connaissant la loi de mouvement et l'état initial, où la grandeur va-t-elle ?**

## Mais il y a deux manières de dire le temps

- Le **temps discret** : les données arrivent par paquets. Un bilan par exercice, un salaire par mois, une cotation par jour. On écrit  $y_0, y_1, y_2, \dots$
- Le **temps continu** : la grandeur est censée évoluer à chaque instant, sans à-coups. On écrit  $y(t)$ .

Ce cours traite les deux **en face à face**, chapitre par chapitre. C'est le seul moyen de voir ce qu'elles ont en commun — beaucoup — et ce qui les sépare — l'essentiel.





### Le choix du temps n'est pas une commodité de calcul

Un économètre travaille sur des séries **discrètes** : il n'a rien d'autre que des observations datées. Un théoricien de la croissance écrit ses modèles en temps **continu** : les équations différentielles se manipulent plus commodément.

Le même phénomène est donc décrit dans deux langages selon la personne qui l'étudie. Un économiste doit savoir passer de l'un à l'autre — et savoir **quand la traduction est fidèle et quand elle ne l'est pas**.

### L'annonce du résultat le plus important du cours

La traduction est presque toujours fidèle quant aux **équilibres** : les mêmes états stationnaires, obtenus par les mêmes calculs.

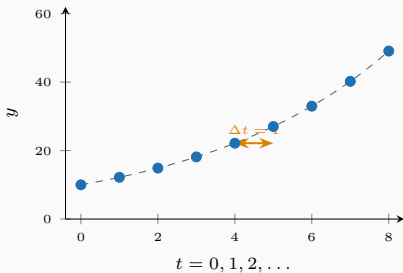
Elle ne l'est pas quant aux **trajectoires**. Le temps discret produit des comportements — oscillations d'une période à l'autre, cycles, chaos — que le temps continu à une dimension ne peut pas produire. Ce point revient à chaque chapitre.

## Suite ou fonction

---

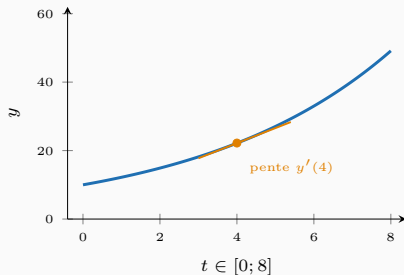
# Deux objets mathématiques

temps discret : une *suite* ( $y_t$ )



la variation se lit **d'un pas à l'autre** :  $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$

temps continu : une *fonction*  $y(t)$



la variation se lit **à l'instant**  $t$  :  $\frac{dy}{dt}$

## En temps discret : une suite

La variable de temps  $t$  prend les valeurs  $0, 1, 2, \dots$  et l'on note  $y_t$  la valeur de la grandeur à la date  $t$ .

L'objet mathématique est une **suite**  $(y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ .

## En temps continu : une fonction

La variable  $t$  parcourt un intervalle de  $\mathbb{R}$  et l'on note  $y(t)$  la valeur à l'instant  $t$ .

L'objet mathématique est une **fonction** de la variable réelle  $t$ .

### La différence n'est pas cosmétique

Une suite n'a pas de valeur entre  $t$  et  $t + 1$  : la question « que vaut  $y$  à la date 3,5 ? » n'a **aucun sens**.

Une fonction, elle, est définie partout. On peut la dériver, l'intégrer, parler de sa tangente. C'est ce qui rend le temps continu si commode — et c'est aussi ce qui l'empêche de représenter certains phénomènes.

## Comment mesurer une variation

---

## En temps discret : la différence première

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$

C'est la variation **effectivement observée** entre deux dates consécutives. Aucune limite n'intervient : c'est une simple soustraction.

## En temps continu : la dérivée

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

C'est la vitesse de variation **à l'instant**  $t$ . Une limite intervient, et c'est elle qui rend l'objet manipulable.

### La notation à retenir

En dynamique économique, on note traditionnellement la dérivée par rapport au temps avec un **point** :  $\dot{y}$  plutôt que  $y'$ . Le point est réservé au temps; le prime reste disponible pour les dérivées par rapport à une autre variable, comme  $f'(k)$  dans le modèle de Solow.



## La correspondance fondamentale

Si l'on découpe le temps en pas de longueur  $h$  et que l'on note  $y_t = y(th)$ , alors

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \dot{y}(t)$$

Le taux d'accroissement **est** la version discrète de la dérivée. Avec  $h = 1$ , la différence première  $\Delta y_t$  tient lieu de  $\dot{y}$ .

## La même loi, écrite dans les deux langages

« Le capital croît de 5 % par an. »

- Temps discret, pas annuel :  $K_{t+1} - K_t = 0,05 K_t$ , soit  $K_{t+1} = 1,05 K_t$ .
- Temps continu :  $\dot{K} = 0,05 K$ .

Solutions :  $K_t = K_0 \times 1,05^t$  d'un côté,  $K(t) = K_0 e^{0,05t}$  de l'autre.

### Deux nombres qui ne sont pas les mêmes

Après un an : 1,05 contre  $e^{0,05} = 1,0513$ . L'écart est de treize points de base — négligeable ici.

Après trente ans :  $1,05^{30} = 4,32$  contre  $e^{1,5} = 4,48$ . L'écart atteint 3,7 %.

C'est exactement la distinction, familière au banquier, entre **taux actuariel** et **taux continu**. Le choix de la représentation du temps est donc, dès le premier chapitre, une question de chiffres.

## Le tableau de correspondance

---

## Le dictionnaire discret et continu

| Notion                     | Temps discret                  | Temps continu                   |
|----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| Objet                      | suite $(y_t)$                  | fonction $y(t)$                 |
| Variation                  | $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$   | $\dot{y} = dy/dt$               |
| Loi de mouvement           | équation de <b>ré</b> currence | équation <b>diff</b> érentielle |
| Croissance à taux constant | $y_t = y_0 a^t$                | $y(t) = y_0 e^{rt}$             |
| Brique élémentaire         | la puissance $a^t$             | l'exponentielle $e^{rt}$        |
| Cumul                      | somme $\sum$                   | intégrale $\int$                |

### Comment s'en servir

Ce tableau se lit **dans les deux sens**. Il permet de deviner la forme d'un résultat dans un langage à partir de l'autre — et l'intuition est juste dans neuf cas sur dix.

Les chapitres suivants le prolongent ligne par ligne. Le dixième cas, celui où l'intuition trompe, fera l'objet des chapitres 4 et 10.

## Puissance et exponentielle

$$a^t = e^{t \ln a}$$

Une puissance **est** une exponentielle. C'est pourquoi les deux théories se ressemblent tant.

## Mais la correspondance a une faille

$e^{rt}$  est toujours **positif**, quel que soit  $r$  réel.

$a^t$  change de **signe** à chaque pas dès que  $a$  est négatif :  $(-0,6)^0 = 1$ ,  $(-0,6)^1 = -0,6$ ,  
 $(-0,6)^2 = 0,36...$

Et  $\ln a$  n'existe pas pour  $a < 0$ . **La traduction s'arrête là.** Toutes les oscillations propres au temps discret viennent de cette impossibilité — c'est le sujet du chapitre 4.

Ce qu'il faut retenir

---

## Cinq points

1. Un modèle dynamique donne une **loi de mouvement** et un **état initial**, et l'on cherche la trajectoire.
2. Temps discret : une **suite**, une équation de **récurrence**, la différence première  $\Delta y_t$ .
3. Temps continu : une **fonction**, une équation **différentielle**, la dérivée  $\dot{y}$ .
4. La brique élémentaire est la **puissance**  $a^t$  d'un côté, l'**exponentielle**  $e^{rt}$  de l'autre – et  $a^t = e^{t \ln a}$  les relie.
5. La correspondance échoue lorsque  $a < 0$  : c'est de là que naîtront les oscillations.

## La suite

Avant de résoudre quoi que ce soit, il faut un vocabulaire commun : ordre, linéarité, autonomie, solution générale, état stationnaire.

Ces six mots ont exactement le même sens dans les deux mondes. C'est le chapitre 2.