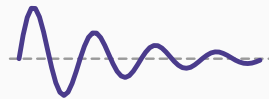


Analyse dynamique des modèles économiques

Chapitre 12 : Du déterminisme au hasard



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Ce qui manque aux onze premiers chapitres

L'AR(1)

Vers le temps continu

Bilan du cours

Ce qui manque aux onze premiers
chapitres

Aucune série réelle ne ressemble à nos trajectoires

Nos solutions sont lisses : une exponentielle, une sinusoïde amortie, une sigmoïde. Une série économique observée est **hachée**.

Deux explications possibles, et le chapitre 10 en a donné une : le chaos déterministe. Voici la seconde, et c'est celle que retient l'économétrie : le modèle est juste, mais il est **perturbé à chaque période**.

La modification

déterministe : $y_t = a y_{t-1} + b$ $\longrightarrow$ stochastique : $y_t = a y_{t-1} + b + \varepsilon_t$

où ε_t est un choc imprévisible, de moyenne nulle.

Ce que représente le choc

Tout ce que le modèle ne dit pas : la météo pour une récolte, une grève, une décision politique, une innovation, une erreur de mesure.

Le modélisateur ne prétend pas expliquer ces événements. Il prétend seulement que **le mécanisme d'ajustement, lui, reste valable entre deux chocs.**

L'AR(1)

Le modèle autorégressif d'ordre 1

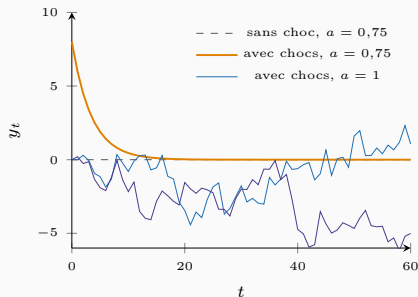
$$y_t = a y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ centré, de variance } \sigma^2, \text{ non corrélé}$$

C'est **exactement** l'équation du chapitre 3, à laquelle on a ajouté un terme aléatoire.

La récurrence perturbée (suite)

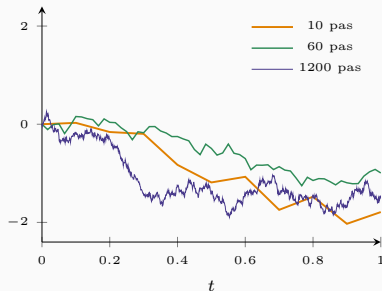
la récurrence *perturbée*

$$y_t = a y_{t-1} + \varepsilon_t$$



la marche aléatoire, de plus en plus fine

même intervalle, pas de temps divisé



à gauche : la loi de mouvement demeure, mais elle est **bousculée** — c'est l'AR(1) de l'économétrie.
à droite : quand le pas tend vers zéro, la marche aléatoire devient le **mouvement brownien**.

Ce que le hasard change, et ce qu'il ne change pas

Le tableau

Question	Déterministe	Stochastique
Trajectoire	unique	une par tirage
Convergence	vers y^*	vers une distribution
Condition	$ a < 1$	$ a < 1$, la même
Long terme	un point	une moyenne et une variance

Le résultat essentiel

La condition de stabilité est inchangée. Tout ce que le cours a établi sur $|a| < 1$ reste vrai mot pour mot.

Ce qui change, c'est la nature de la limite : au lieu de converger vers un nombre, la série converge vers un **régime statistique** — elle continue de bouger, mais autour d'un niveau et avec une amplitude qui, eux, se stabilisent.

Le régime de long terme

Pour $|a| < 1$:

$$E(y_t) \longrightarrow 0 \qquad V(y_t) \longrightarrow \frac{\sigma^2}{1 - a^2}$$

On dit que le processus est **stationnaire**.

Lire la formule de la variance

$\frac{\sigma^2}{1 - a^2}$ explose quand a approche de 1.

Traduction : plus le système a de mémoire, plus les chocs s'accumulent avant de s'effacer, et plus la série s'éloigne de sa moyenne. Une économie très inerte est une économie très volatile — un résultat que le modèle déterministe ne pouvait pas donner.

La marche aléatoire

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Longleftrightarrow \quad y_t = y_0 + \sum_{k=1}^t \varepsilon_k$$

$$E(y_t) = y_0 \quad V(y_t) = t \sigma^2$$

Le cas frontière, revisité

Le chapitre 3 signalait déjà $a = 1$ comme cas dégénéré : croissance linéaire, pas d'équilibre.

Avec du hasard, ce cas devient bien plus intéressant. La série n'a pas de niveau de référence, et sa **variance croît sans limite** : chaque choc est mémorisé pour toujours.

C'est la fameuse **racine unitaire** de l'économétrie des séries temporelles, et c'est pourquoi tout travail sur données macroéconomiques commence par la tester.

Une question qui a occupé la profession pendant trente ans

Le PIB est-il un AR(1) avec a proche de 1, ou une marche aléatoire avec $a = 1$ exactement ?

L'enjeu n'est pas statistique, il est théorique :

- $a < 1$: une récession est un **écart temporaire** à une tendance. L'économie y revient.
- $a = 1$: une récession **déplace définitivement** le niveau de production. Il n'y a rien à rattraper.

Politique de relance ou politique de l'offre : la réponse dépend d'un coefficient, et de savoir s'il vaut 0,97 ou 1.

Vers le temps continu

La marche aléatoire à pas fin

Sur l'intervalle $[0; 1]$ découpé en n pas, on fait sauter la série de $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ à chaque pas.

Quand $n \rightarrow \infty$, la trajectoire converge vers un objet limite : le **mouvement brownien**.

Pourquoi la racine carrée

Si l'on veut que la variance à l'instant 1 reste égale à 1 quel que soit le découpage, il faut que la variance de chaque pas soit $1/n$ — donc que son écart-type soit $1/\sqrt{n}$.

Le temps se divise, mais l'amplitude ne se divise que par sa racine carrée. Cette dissymétrie est la propriété fondamentale du hasard cumulé, et c'est elle qui explique la fameuse règle de la racine du temps en finance.

Les propriétés du mouvement brownien

Propriété	Énoncé
Point de départ	$W_0 = 0$
Accroissements	indépendants
Loi	$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0; t - s)$
Trajectoires	continues, nulle part dérivables

La ligne qui pose problème

Continues mais **nulle part dérivables** : on ne peut pas écrire $\dot{W}$.

Or toute la partie « temps continu » de ce cours repose sur la dérivée. **Le hasard en temps continu échappe donc au calcul différentiel ordinaire**, et exige un calcul nouveau — le calcul stochastique, et le lemme d'Itô.

C'est l'objet d'un cours de Master. Vous savez maintenant d'où vient le problème.

Le tableau d'ensemble

Les quatre cases de l'analyse dynamique

	Déterministe	Stochastique
Temps discret	réurrence	AR, ARMA — économétrie
Temps continu	équation différentielle	équation différentielle stochastique — finance

Où mène chaque case

- Réurrence et équation différentielle : ce cours, et la macroéconomie dynamique.
- AR et ARMA : l'économétrie des séries temporelles, la prévision, les modèles de volatilité.
- Équations différentielles stochastiques : le mouvement brownien géométrique, Black et Scholes, l'évaluation des options.

Les quatre cases reposent sur les mêmes objets : un état, une loi de mouvement, une condition initiale, une question de stabilité. Ce cours a construit les deux cases de gauche; il a rendu les deux autres lisibles.

Bilan du cours

Ce qui se traduit d'un temps à l'autre

Notion	Discret	Continu
Brique	a^t	e^{at}
Équilibre	$y^* = f(y^*)$	$f(y^*) = 0$
Ordre 2	$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0$	$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$
Systèmes	valeurs propres de A	valeurs propres de A
Stabilité	module < 1	partie réelle < 0

Ce qui ne se traduit pas

Phénomène	Discret	Continu
Oscillation à l'ordre 1	oui	jamais
Cycle de période 2	oui	jamais
Chaos à une dimension	oui	jamais
Région stable bornée	oui	non

La leçon du face à face

Les deux représentations du temps donnent **les mêmes équilibres** et **la même architecture de résolution**. Sur ce plan, elles sont interchangeables, et c'est ce qui autorise l'économiste à passer de l'une à l'autre selon sa commodité.

Elles ne donnent pas les mêmes **trajectoires**. Le temps discret contient un délai que le temps continu ignore, et ce délai suffit à engendrer oscillations, cycles et chaos.

Ce qu'il faut en retenir pour la pratique

Le choix du temps est un choix de modélisation, jamais une commodité de calcul.

Si le phénomène étudié comporte un délai de décision — une récolte, un investissement, une révision de prix —, il doit être écrit en temps discret. L'écrire en continu ferait disparaître précisément ce qu'on veut expliquer.

À l'inverse, si l'ajustement est continu et que l'on cherche des propriétés analytiques, le temps continu est plus maniable.

Savoir lequel choisir, et savoir ce que l'on perd en choisissant : c'était l'objet de ce cours.