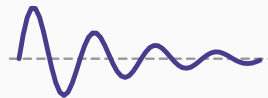


Analyse dynamique des modèles économiques

Chapitre 6 : Quand les coefficients changent



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Lever l'hypothèse de constance

Sans second membre

Avec second membre

Un cas économique complet

Ce qu'il faut retenir

Lever l'hypothèse de constance

Les deux équations du chapitre

$$\text{Discret : } y_{t+1} = a_t y_t + b_t$$

$$\text{Continu : } \dot{y} = a(t) y + b(t)$$

Les coefficients dépendent maintenant de la date.

Trois situations économiques qui l'imposent

- Un **taux d'intérêt variable** : le capital ne croît pas au même rythme chaque année.
- Un **flux saisonnier** : les recettes d'un commerce ne sont pas les mêmes en décembre et en février.
- Une **politique révisée** : un taux de subvention modifié à chaque loi de finances.

Dans ces trois cas, a ou b change, et les formules du chapitre 3 ne s'appliquent plus.

Ce qu'on perd, ce qu'on garde

On perd l'**état stationnaire** : une cible qui bouge n'est plus une cible.

On garde l'architecture : sans second membre d'abord, solution particulière ensuite. Simplement, la « brique » cesse d'être a^t ou e^{at} .

Sans second membre

Le cas discret : un produit

Résolution de $y_{t+1} = a_t y_t$

On itère, comme au chapitre 3 :

$$y_1 = a_0 y_0, \quad y_2 = a_1 a_0 y_0, \quad y_3 = a_2 a_1 a_0 y_0$$

$$y_t = y_0 \prod_{k=0}^{t-1} a_k$$

La puissance devient un produit

a^t n'était rien d'autre que le produit de t facteurs tous égaux. Dès qu'ils diffèrent, on garde le produit et l'on renonce à la puissance.

Rien de nouveau n'est requis : c'est la même itération, écrite avec un symbole $\prod$.

Résolution de $\dot{y} = a(t)$, y

Séparation des variables, comme au chapitre 3 :

$$\frac{dy}{y} = a(t) dt \implies \ln |y| = \int_0^t a(s) ds + C$$

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right)$$

La correspondance, prolongée

Coefficients constants	Coefficients variables
$y_0 a^t$	$y_0 \prod_{k < t} a_k$
$y_0 e^{at}$	$y_0 \exp\left(\int_0^t a\right)$

Produit et intégrale se répondent, exactement comme somme et intégrale. C'est la dernière ligne du dictionnaire du chapitre 1.

Un taux qui monte régulièrement

Un capital placé au taux instantané $a(t) = 0,02 + 0,003 t$:

$$\int_0^t (0,02 + 0,003 s) ds = 0,02 t + 0,0015 t^2$$

$$K(t) = K_0 e^{0,02t+0,0015t^2}$$

Après dix ans, le facteur vaut $e^{0,2+0,15} = e^{0,35} = 1,419$, contre $e^{0,2} = 1,221$ à taux fixe.

Avec second membre

Le facteur intégrant

La méthode du temps continu

Pour $\dot{y} - a(t)y = b(t)$, on pose

$$\mu(t) = \exp\left(-\int_0^t a(s) \, ds\right)$$

En multipliant l'équation par μ , le membre de gauche devient la dérivée d'un produit :

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)b(t)$$

Il ne reste qu'à intégrer.

Ce que fait cette astuce

Elle transforme une équation différentielle en un simple calcul de primitive. Le facteur μ n'a pas de contenu économique : c'est un multiplicateur choisi pour faire apparaître la dérivée d'un produit.

À retenir : le facteur intégrant est l'inverse de la solution sans second membre.

Application à coefficients constants

$\dot{y} = a y + b$. Ici $\mu = e^{-at}$, et

$$(e^{-at}y)' = b e^{-at} \implies e^{-at}y = -\frac{b}{a}e^{-at} + C \implies y(t) = -\frac{b}{a} + C e^{at}$$

On retrouve exactement la formule du chapitre 3. **La méthode générale contient bien le cas particulier.**

Le pendant discret

$$y_t = y_0 \prod_{k=0}^{t-1} a_k + \sum_{j=0}^{t-1} b_j \prod_{k=j+1}^{t-1} a_k$$

Comment lire cette formule intimidante

Elle dit simplement ceci : **chaque apport b_j est ensuite multiplié par tous les coefficients qui le suivent.**

Un versement fait à la date j est capitalisé de j jusqu'à t , et rien d'autre. La somme totalise ces contributions.

C'est le raisonnement d'un tableau d'amortissement, écrit en une ligne.

À coefficients constants

Avec $a_k = a$ et $b_j = b$:

$$y_t = y_0 a^t + b \frac{1 - a^t}{1 - a}$$

et l'on retrouve, après réarrangement, $y_t = y^* + (y_0 - y^*)a^t$ avec $y^* = b/(1 - a)$.

Un cas économique complet

Le plan d'épargne à versements croissants

L'énoncé

Un épargnant verse $V_t = 1000 \times 1,03^t$ dirhams en fin d'année t – ses versements suivent l'inflation. Le capital est rémunéré au taux fixe 5 %.

$$K_{t+1} = 1,05 K_t + 1000 \times 1,03^t, \quad K_0 = 0$$

Coefficient a constant, second membre **variable**.

La résolution

On cherche une solution particulière de la forme $K_t = \alpha \times 1,03^t$:

$$\alpha 1,03^{t+1} = 1,05 \alpha 1,03^t + 1000 \times 1,03^t$$

En divisant par $1,03^t$: $1,03 \alpha = 1,05 \alpha + 1000$, donc $-0,02 \alpha = 1000$ et $\alpha = -50\,000$.

Solution générale : $K_t = C \times 1,05^t - 50\,000 \times 1,03^t$.

Condition $K_0 = 0$: $C = 50\,000$.

La lecture

$K_{10} = 50\,000(1,629 - 1,344) = 14\,250$ dirhams. $K_{20} = 50\,000(2,653 - 1,806) = 42\,350$ dirhams. $K_{30} = 50\,000(4,322 - 2,427) = 94\,750$ dirhams.

Le capital est la **différence de deux exponentielles** : celle du placement et celle des versements. Il croît d'autant plus vite que l'écart entre le taux servi et le taux d'indexation est grand.

Si les deux taux étaient égaux, la méthode échouerait — c'est le cas de **résonance**, où la solution particulière doit être cherchée sous la forme $\alpha t a^t$. La même exception existe en temps continu.

La méthode des coefficients indéterminés

Une technique qui sert dans les deux langages

Quand le second membre a une forme simple, on cherche une solution particulière **de la même forme**, avec un coefficient à déterminer.

Second membre	Essayer
constante	constante
r^t ou e^{rt}	αr^t ou αe^{rt}
polynôme de degré n	polynôme de degré n
cos ou sin	combinaison des deux

Exception : si la forme essayée est déjà solution sans second membre, multiplier par t .

Le conseil pratique

Cette méthode est plus rapide que le facteur intégrant et que la somme générale — et elle couvre la quasi-totalité des exercices.

Réservez les formules générales aux cas où le second membre n'a aucune forme reconnaissable.

Ce qu'il faut retenir

Cinq points

1. Coefficients variables : la puissance devient un **produit**, l'exponentielle devient l'exponentielle d'une **intégrale**.
2. En continu, le **facteur intégrant** $\mu = \exp(-\int a)$ ramène l'équation à un calcul de primitive.
3. En discret, chaque apport b_j est capitalisé par tous les coefficients postérieurs.
4. La méthode des **coefficients indéterminés** est la plus rapide en pratique — attention au cas de résonance.
5. Il n'y a plus d'état stationnaire : la notion de stabilité doit être remplacée par une comparaison de vitesses de croissance.

La suite

L'ordre 1 est clos. Il ne permet pas de représenter l'accélérateur d'investissement, ni les cycles économiques — pour cela il faut deux retards.

La partie III passe à l'ordre 2, puis aux systèmes.