

Algèbre linéaire

Chapitre 3 : Trace, déterminant et rang



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

La trace d'une matrice carrée

Le déterminant d'une matrice carrée

Le rang d'une matrice rectangulaire

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

On associe aux matrices des caractéristiques numériques à usages variés. La **trace** et le **déterminant** ne concernent que les matrices carrées; le **rang**, lui, se calcule pour toute matrice. Ces trois notions préparent directement l'inversion (chapitre 4) et la résolution des systèmes linéaires (chapitre 5).

La trace d'une matrice carrée

Trace

La **trace** d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{n \times n}$ est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

On a $\operatorname{tr}(0_{n \times n}) = 0$ et $\operatorname{tr}(I_n) = n$.

Propriétés de la trace

Pour des tailles compatibles :

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B, \quad \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A, \quad \operatorname{tr}(A^\top) = \operatorname{tr} A, \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

La trace, malgré sa simplicité, est puissante

La dernière propriété, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, est vraie même quand $AB \neq BA$: elle permet de « faire circuler » les matrices sous la trace, une manipulation fréquente en statistique (par exemple pour la variance totale d'un portefeuille, ci-dessous).

Le déterminant d'une matrice carrée

Déterminant, cas $n \leq 3$

Toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{n \times n}$ admet un déterminant réel, noté $\det A$ ou $|A|$.

- $n = 1$: $\det(a_{11}) = a_{11}$.

- $n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

- $n = 3$ (règle de Sarrus) : $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$.

Définition générale

Pour $A = (a_{ij})_{n \times n}$ quelconque, on considère les **permutations** de $\{1, \dots, n\}$ (bijections de cet ensemble dans lui-même); chacune a une **signature** $\text{sign } \pi = \pm 1$. Le déterminant est la somme algébrique des $n!$ produits

$$\det A = \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

où la signature indique si chaque produit est affecté d'un signe $+$ ou $-$. Les cas $n = 2, 3$ ci-dessus en sont des instances.

Propriétés du déterminant

Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$; $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det(BA)$; $\det(A^\top) = \det A$.
- Le déterminant est **nul** si : une ligne (ou colonne) de zéros, deux lignes (ou colonnes) proportionnelles, ou une ligne (resp. colonne) combinaison linéaire des autres.
- Il est **inchangé** si on ajoute à une ligne (resp. colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (resp. colonnes); il **change de signe** si on permute deux lignes (ou colonnes); il est **multiplié par λ** si on multiplie une ligne (ou colonne) par λ .

Le déterminant d'une somme n'est pas la somme des déterminants

Contrairement à la trace, le déterminant n'est **pas linéaire** : $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ en général. C'est en revanche **multiplicatif** : $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, une propriété qui se révélera essentielle pour caractériser l'inversibilité (chapitre 4).

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Par Sarrus :}$$

$$\det A = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 6 + 0 + 0 - 0 + 1 - 4 = 3.$$

Le rang d'une matrice rectangulaire

Rang

Le **rang** de $A = (a_{ij})_{n \times m}$, noté $\text{rg } A$, est le nombre de colonnes de A **linéairement indépendantes**.
 A est **de plein rang** si $\text{rg } A = \min\{m, n\}$.

Propriétés du rang

- $\text{rg } A = \text{rg } A^T$ (le rang est symétrique en lignes et colonnes, malgré une définition qui semble privilégier les colonnes); $\text{rg } A \leq m$ et $\text{rg } A \leq n$.
- Le rang **ne change pas** si l'on permute des lignes (ou colonnes), multiplie une ligne (ou colonne) par un réel non nul, ou ajoute à une ligne (resp. colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (resp. colonnes).

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ a un rang égal à 1 : sa deuxième ligne (et sa deuxième et troisième colonne) sont proportionnelles à la première. A n'est donc **pas** de plein rang ($\min\{2, 3\} = 2 \neq 1$).

Application en gestion : risque de portefeuille et multicolinéarité

Pour un portefeuille de poids $w = (w_1, \dots, w_n)^\top$ et de matrice de variances-covariances Σ , la variance totale s'écrit $w^\top \Sigma w$; la somme des variances individuelles, elle, est $\text{tr } \Sigma$ — deux résumés numériques bien distincts d'une même matrice. En économétrie, si les colonnes de la matrice des régresseurs X (les variables explicatives) sont linéairement dépendantes, $\text{rg } X < m$: c'est la **multicolinéarité parfaite**, qui empêche l'estimation par moindres carrés (chapitre régression multiple). Enfin, un système de n prix d'équilibre n'admet une solution **unique** que si le déterminant de sa matrice de coefficients est **non nul** — le lien exact avec le chapitre 4.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 3

- **Trace** : somme des éléments diagonaux; linéaire, et $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- **Déterminant** : nombre associé à toute matrice carrée; multiplicatif ($\det(AB) = \det A \det B$), pas additif; nul dès qu'il y a dépendance linéaire entre lignes ou colonnes.
- **Rang** : nombre de colonnes (= lignes) linéairement indépendantes; invariant par combinaisons linéaires élémentaires.

Vers le chapitre 4

La nullité du déterminant s'avère être la caractéristique qui décide si une matrice carrée est inversible. Le chapitre 4 en fait la pierre angulaire de l'inversion.