

Algèbre linéaire

Chapitre 5 : Systèmes linéaires



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Définitions et propriétés générales

La méthode de Gauss

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Un empilement d'équations linéaires modélise des situations très diverses : équilibres de marché à plusieurs biens, bilans comptables, modèles entrées-sorties. Ce chapitre en systématise la résolution — au-delà des seuls systèmes carrés inversibles du chapitre 4.

Définitions et propriétés générales

Système linéaire

Un **système linéaire** de n équations à m inconnues s'écrit sous forme matricielle $AX = B$, où $A = (a_{ij})_{n \times m}$, $B = (b_i)_{n \times 1}$ et $X = (x_j)_{m \times 1}$. Une **solution** est un vecteur X dont les composantes vérifient simultanément toutes les équations. Le système est dit :

- **carré** si $m = n$;
- **de Cramer** si, de plus, A est inversible;
- **homogène** si $B = 0$.

Existence et multiplicité des solutions

- Tout système homogène $AX = 0$ admet au moins la **solution nulle**.
- Si $AX = B$ admet **deux** solutions distinctes, il en admet une **infinité** : l'ensemble des solutions est $\{X = \tilde{X} + Y : AY = 0\}$, où $\tilde{X}$ est une solution particulière.
- En notant $[A:B]$ la matrice « augmentée » (colonne B accolée à A) : $AX = B$ admet **au moins une solution** $\iff \text{rg } A = \text{rg}[A:B]$; elle est **unique** $\iff \text{rg } A = \text{rg}[A:B] = m$.

Trois issues possibles, jamais deux

Un système linéaire n'a **jamais** exactement deux solutions : soit aucune, soit une seule, soit une infinité

La méthode de Gauss

Élimination de Gauss

La méthode de Gauss résout $AX = B$ par **substitutions successives** : à l'étape k , si le coefficient pivot $a_{kk} \neq 0$ (sinon on permute d'abord deux équations), on annule le coefficient de x_k dans toutes les autres équations en leur soustrayant un multiple approprié de l'équation k . Le système obtenu, équivalent au système initial, s'achève lorsque toutes les variables ou équations ont été traitées. À ce stade, chaque équation restante appartient à l'un des trois cas suivants.

- Équation sans inconnue : $0 = 0$ (on l'élimine) ou $0 = c \neq 0$ (le système est **impossible**, inutile de poursuivre).
- Équation à une seule inconnue x_i : sa valeur est immédiatement donnée.
- Équation à plusieurs inconnues : le système est **indéterminé**; on exprime x_i en fonction des autres (traitées comme des paramètres).

Gauss calcule aussi le rang

Moyennant une éventuelle permutation de colonnes (qui ne change pas le rang), la méthode de Gauss ramène toute matrice à une forme triangulaire par blocs dont le nombre de « pivots » non nuls est précisément $\text{rg } A$ — un sous-produit précieux de la méthode.

Exemple

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad . \text{ En éliminant } x \text{ (} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \text{)} : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases} \quad , \text{ puis en}$$

éliminant y ($L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2$) : $-\frac{7}{3}z = -\frac{21}{3} \Rightarrow z = 3$. On remonte : $y = -4 + 2z = 2$, puis $x = 6 - y - z = 1$. Solution unique $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Application en gestion : équilibre simultané de plusieurs marchés

Trois biens aux prix p_1, p_2, p_3 ont des demandes et offres linéaires dépendant les uns des autres (biens substitués ou complémentaires). L'équilibre simultané ($D_i = O_i$ pour $i = 1, 2, 3$) se ramène à un système linéaire $AP = B$ où A contient les coefficients croisés de prix. Si le système est de Cramer, $P^* = A^{-1}B$ donne directement les prix d'équilibre (chapitre 4); sinon, la méthode de Gauss reste applicable et révèle, le cas échéant, une **indétermination** — signe que l'un des marchés est redondant avec les autres (rang déficient).

Synthèse

L'essentiel du chapitre 5

- $AX = B$: existence $\iff \text{rg } A = \text{rg}[A:B]$; unicité si, en plus, ce rang commun vaut m .
- Un système homogène a toujours la solution nulle; s'il en a une autre, il en a une infinité.
- La méthode de Gauss résout tout système, quelle que soit sa taille, et calcule au passage le rang de A .

Vers le chapitre 6

La méthode de Gauss « annule » des éléments par transformations successives. Pousser cette logique jusqu'à obtenir une matrice **diagonale semblable** à une matrice carrée donnée est l'objet du chapitre 6 : la diagonalisation.