

Algèbre linéaire

Chapitre 1 : Opérations sur les matrices



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Prérequis

Avant de commencer

Notion de matrice

Synthèse

Prérequis

Le cours qui précède

Analyse mathématique, pour l'aisance avec les systèmes d'équations et le raisonnement formel.

Les notions mobilisées

Résoudre un système linéaire à deux ou trois inconnues. Manipuler des sommes indexées. Le second degré, pour les valeurs propres d'une matrice 2×2 .

Repris depuis le début

Vecteur, matrice, déterminant, rang, valeur propre : rien n'est supposé connu. Le cours part du tableau de nombres et construit tout.

Il est le prérequis de trois cours ultérieurs — *Analyse dynamique*, *Analyse des données avancée*, *Apprentissage statistique* —, ce qui justifie qu'il ne saute aucune étape.

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Les matrices condensent des tableaux de nombres — quantités, prix, coefficients techniques — dans une écriture unique, manipulable par un petit nombre d'opérations. Ce cours d'algèbre linéaire prépare directement l'optimisation des fonctions de plusieurs variables (gradient, hessienne), et trouve une utilité immédiate en gestion : bilans, portefeuilles, tableaux entrées-sorties.

Notion de matrice

Matrice réelle

Une **matrice réelle** A de taille $n \times m$ (à n lignes et m colonnes) est un tableau de nombres réels

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

noté sous forme condensée $A = (a_{ij})_{n \times m}$. L'ensemble des matrices réelles de taille $n \times m$ est noté $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Indices muets, indices fixés

Dans l'écriture $A = (a_{ij})_{n \times m}$, les indices i et j sont **muets** : on pourrait tout aussi bien écrire $A = (a_{kl})_{n \times m}$. Mais pour des valeurs **fixées** de i et j , a_{ij} désigne précisément l'élément situé en i -ème ligne et j -ème colonne. Deux matrices sont **égales** si elles ont la même taille et si tous leurs éléments de mêmes indices coïncident.

Addition et multiplication par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})_{n \times m}$ et $B = (b_{ij})_{n \times m}$ (mêmes tailles), et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Somme : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m}$.
- Multiplication scalaire : $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{n \times m}$.

Ces deux opérations s'effectuent **élément par élément** et ne sont définies que pour des matrices de même taille.

Produit de deux matrices

Si $A = (a_{ik})_{n \times p}$ et $B = (b_{kj})_{p \times m}$ (le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B), leur produit $C = AB$ est la matrice $C = (c_{ij})_{n \times m}$ définie par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Une opération exigeante et non commutative

Le produit AB n'existe que si les tailles sont **compatibles** (A a autant de colonnes que B a de lignes). Même quand AB et BA existent tous deux, ils diffèrent en général : le produit matriciel n'est **pas commutatif**. En revanche, il reste associatif et distributif par rapport à l'addition.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq AB$.

Transposition

Matrice transposée

La **transposée** de $A = (a_{ij})_{n \times m}$ est la matrice $A^\top = (a_{ji})_{m \times n}$, obtenue en échangeant le rôle des lignes et des colonnes. Propriétés :

$$(A^\top)^\top = A, \quad (A + B)^\top = A^\top + B^\top, \quad (AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Pourquoi l'ordre s'inverse

Dans $(AB)^\top = B^\top A^\top$, l'ordre des facteurs **s'inverse** : c'est la seule façon de conserver la compatibilité des tailles lors de la transposition d'un produit — une vérification utile avant tout calcul.

Application en gestion : bilans et portefeuilles

Une entreprise possédant n filiales enregistre, pour m postes comptables (chiffre d'affaires, charges, résultat...), une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$: la ligne i décrit la filiale i . La consolidation du groupe sur deux exercices additionne simplement les matrices $A_1 + A_2$. Un actionnaire détenant les quantités $q = (q_1, \dots, q_n)$ de n actions aux prix $p = (p_1, \dots, p_n)^\top$ calcule la valeur de son portefeuille par le produit matriciel qp (matrice $1 \times n$ par matrice $n \times 1$) : c'est la première rencontre, très naturelle, du produit matriciel en finance.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 1

- Une matrice $A = (a_{ij})_{n \times m}$ condense un tableau de $n \times m$ nombres réels.
- Addition et multiplication scalaire s'effectuent élément par élément, entre matrices de même taille.
- Le produit matriciel exige la compatibilité des tailles ($n \times p$ par $p \times m$) et n'est **pas commutatif**.
- La transposition échange lignes et colonnes; $(AB)^T = B^T A^T$ (ordre inversé).

Vers le chapitre 2

Certaines matrices ont une structure particulière — triangulaires, symétriques, diagonales — qui simplifie considérablement les calculs. Le chapitre 2 les répertorie.