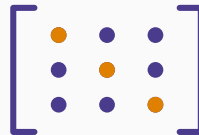


Algèbre linéaire

Chapitre 2 : Matrices particulières et sous-matrices



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Matrices carrées particulières

Matrices rectangulaires et sous-matrices

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Certaines matrices ont une structure remarquable qui simplifie leurs propriétés — trace, déterminant, inversion (chapitres suivants). Repérer ces structures est souvent la première chose à faire face à une matrice donnée.

Matrices carrées particulières

Matrices carrées particulières

Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

- A est **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si $\forall i > j$ (resp. $j > i$) : $a_{ij} = 0$ — tous les éléments **sous** (resp. **au-dessus** de) la diagonale sont nuls.
- A est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) si $\forall i, j : a_{ij} = a_{ji}$ (resp. $a_{ij} = -a_{ji}$).

Lire une matrice symétrique

Une matrice symétrique vérifie $A = A^T$: elle est son propre miroir par rapport à la diagonale. C'est la structure la plus fréquente en pratique — toute matrice de variances-covariances, par exemple, est symétrique — et elle jouera un rôle privilégié au chapitre 6 (elle est **toujours diagonalisable**).

Matrice diagonale, matrice identité

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ est **diagonale** si $\forall i \neq j : a_{ij} = 0$ (seule la diagonale peut être non nulle) – à la fois triangulaire supérieure et inférieure. La **matrice identité** $I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$, où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon, est la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux valent 1. Elle est **neutre** pour le produit matriciel : $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : I_n A = A = A I_n$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonale (et donc symétrique, triangulaire supérieure et inférieure).

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $I_3 A = A I_3 = A$.

Matrices rectangulaires et sous-matrices

Matrices lignes, colonnes, sous-matrices

Vecteurs lignes et colonnes

Parmi les matrices de taille quelconque (dites **rectangulaires**), on distingue les **matrices colonnes**, de taille $n \times 1$, et les **matrices lignes**, de taille $1 \times n$. Toute ligne ou colonne extraite d'une matrice A en est une **sous-matrice**.

Des lignes et colonnes aux vecteurs

À toute ligne ou colonne de A , on associe naturellement un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Cela permet de parler d'**indépendance linéaire** entre les lignes ou les colonnes d'une matrice donnée — une notion centrale pour le rang (chapitre 3) : des colonnes sont linéairement indépendantes si aucune n'est combinaison linéaire des autres.

Application en gestion : lire un tableau de données

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de dépenses par ménage (n ménages, m postes de consommation) a pour lignes les **budgets individuels** et pour colonnes les **dépenses agrégées par poste** sur l'échantillon. Une matrice **diagonale** de coûts unitaires signifie que chaque input a un coût qui lui est propre, indépendant des quantités des autres inputs — l'hypothèse la plus simple, souvent le point de départ d'un modèle de coûts avant d'introduire des termes croisés (matrice non diagonale).

Synthèse

L'essentiel du chapitre 2

- **Triangulaire** (sup./inf.) : zéros sous/au-dessus de la diagonale; **diagonale** : les deux à la fois.
- **Symétrique** : $A = A^T$; **antisymétrique** : $A = -A^T$.
- I_n est neutre pour le produit matriciel.
- Lignes et colonnes s'identifient à des vecteurs — d'où la notion d'indépendance linéaire entre elles.

Vers le chapitre 3

Comment résumer une matrice carrée par un seul nombre ? La trace et le déterminant répondent à cette question, tandis que le rang généralise l'indépendance linéaire à toute matrice, carrée ou non.