

Algèbre linéaire

Chapitre 4 : Inversion de matrices carrées



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Matrices inversibles

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Dans $\mathbb{R}^{n \times n}$, I_n joue le rôle du nombre 1 pour le produit matriciel. L'inversion cherche l'équivalent matriciel de « diviser par A » — un outil décisif pour résoudre des systèmes linéaires (chapitre 5) et, en économie, pour quantifier des effets multiplicateurs.

Matrices inversibles

Définition

Matrice inversible

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est **inversible** (ou **régulière**) s'il existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n.$$

A^{-1} est alors la **matrice inverse** de A . Une matrice carrée non nulle n'est pas nécessairement inversible; on parle de matrice **singulière** dans le cas contraire.

Propriétés de l'inverse

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible :

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{-1}.$$

Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont inversibles, alors AB l'est aussi et

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad (\text{ordre inversé, comme pour la transposition}).$$

Critère d'inversibilité

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ est inversible} \iff \det A \neq 0 \iff \operatorname{rg} A = n.$$

Trois façons de dire la même chose

Ces trois formulations sont équivalentes et se complètent : le déterminant offre un test numérique rapide, le rang une lecture en termes d'indépendance linéaire des lignes ou colonnes. En pratique, calculer $\det A$ est souvent le test le plus direct.

Deux méthodes usuelles

On peut déterminer A^{-1} en posant $AX = I_n$ pour une matrice X inconnue et en résolvant le système linéaire obtenu (chapitre 5), ou en exploitant les propriétés du déterminant (matrice des cofacteurs). Pour $n = 2$, une formule explicite existe.

Formule explicite pour $n = 2$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\det A = ad - bc \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det A = 2 - 1 = 1 \neq 0, \text{ donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ On vérifie}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Application en gestion : la matrice de Leontief

Un modèle entrées-sorties décrit n secteurs dont la production totale X satisfait $X = AX + D$, où A est la matrice des **coefficients techniques** (l'élément a_{ij} = quantité du bien i nécessaire pour produire une unité du bien j) et D la **demande finale**. Si $(I_n - A)$ est inversible,

$$X = (I_n - A)^{-1}D,$$

où $(I_n - A)^{-1}$ est la **matrice de Leontief** (ou matrice des multiplicateurs) : chacun de ses éléments donne l'effet total — direct **et** indirect — d'une variation unitaire de demande finale d'un bien sur la production de tous les autres. C'est l'un des exemples les plus classiques de l'algèbre linéaire appliquée à l'économie.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 4

- A inversible $\iff \exists A^{-1}$ tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (ordre inversé).
- A inversible $\iff \det A \neq 0 \iff \text{rg } A = n$ – trois lectures d'une même propriété.
- Application phare : la matrice de Leontief $(I_n - A)^{-1}$ en analyse entrées-sorties.

Vers le chapitre 5

L'inversion permet de résoudre directement les systèmes **carrés** de type Cramer ($X = A^{-1}B$). Le chapitre 5 généralise à tous les systèmes linéaires, carrés ou non, grâce à la méthode de Gauss.