

Algèbre linéaire

Chapitre 7 : Formes quadratiques



Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Signe d'une forme quadratique

Synthèse

Avant de commencer

Pourquoi ce chapitre ?

Dernier maillon de ce cours : les formes quadratiques généralisent le carré x^2 à plusieurs variables. Leur signe — positif, négatif, ou variable — repose entièrement sur les outils des chapitres précédents (déterminant, valeurs propres), et conditionne directement la classification des extrema en optimisation à plusieurs variables.

Signe d'une forme quadratique

Forme quadratique

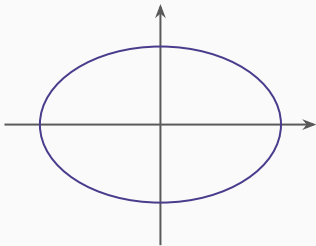
Une **forme quadratique** est une fonction $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme $Q(x) = X^\top \alpha X = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Comme $\alpha_{ij} x_i x_j + \alpha_{ji} x_j x_i$ ne dépend que de $\alpha_{ij} + \alpha_{ji}$, on peut toujours supposer, sans perte de généralité, que α est symétrique.

Signe d'une forme quadratique

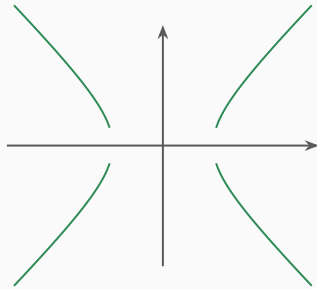
Soit $Q(x) = X^\top \alpha X$, α symétrique.

- Q est **définie positive** (resp. **définie négative**) si $\forall x \neq 0 : Q(x) > 0$ (resp. $Q(x) < 0$).
- Q est **semi-définie positive** (resp. **négative**) si $\forall x : Q(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0).
- Q est **indéfinie** si $\exists x, y : Q(x) > 0$ et $Q(y) < 0$.

(Toujours : $Q(0) = 0$.)



(a) définie positive : $Q(x) = 1$ est une ellipse



(b) indéfinie : $Q(x) = 1$ est une hyperbole

Diagonaliser pour lire le signe

Toute matrice symétrique α est diagonalisable (chapitre 6) : $\alpha = H^{-1}\beta H$, β diagonale, H inversible. Le changement de variable $Y = HX$ donne $Q(x) = \hat{Q}(y) = \sum_i d_i y_i^2$, où les d_i sont les valeurs propres de α (éléments diagonaux de β) : Q et $\hat{Q}$ ont **le même signe**.

Signe et valeurs propres

Soit $Q(x) = X^\top \alpha X$, α symétrique.

- Q définie positive $\iff$ toutes les valeurs propres de α sont > 0 .
- Q définie négative $\iff$ toutes les valeurs propres de α sont < 0 .
- Q semi-définie positive (resp. négative) $\iff$ toutes les valeurs propres sont ≥ 0 (resp. ≤ 0).

Mineurs principaux

Les **mineurs principaux** de $\alpha = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ sont les déterminants $\det \alpha^{(i)}$ des n sous-matrices « en haut à gauche » de taille $i \times i$, $i = 1, \dots, n$. Cette méthode, souvent plus rapide qu'une diagonalisation complète, permet de trancher :

- α définie positive $\iff \forall i : \det \alpha^{(i)} > 0$;
- α définie négative $\iff \forall i : (-1)^i \det \alpha^{(i)} > 0$ (signes alternés, en commençant par négatif);
- α semi-définie positive (resp. négative) $\Rightarrow \forall i : \det \alpha^{(i)} \geq 0$ (resp. $(-1)^i \det \alpha^{(i)} \geq 0$) – condition **nécessaire, non suffisante**;
- s'il existe i **pair** avec $\det \alpha^{(i)} < 0$, alors α est **indéfinie**.

Cas particulier 2×2

Pour $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, associée à $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, les mineurs sont $\det \alpha^{(1)} = a$ et $\det \alpha^{(2)} = ac - b^2$:

- définie positive $\iff a > 0$ et $ac - b^2 > 0$;
- définie négative $\iff a < 0$ et $ac - b^2 > 0$;
- $ac - b^2 < 0 \Rightarrow$ indéfinie.

Exemple : une forme définie positive

$Q(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy$, associée à $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Mineurs : $\det \alpha^{(1)} = 1 > 0$,

$\det \alpha^{(2)} = 3 - 1 = 2 > 0 \Rightarrow Q$ est **définie positive**. Vérification par les valeurs propres : $\operatorname{tr} \alpha = 4$, $\det \alpha = 2$, d'où $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ – toutes deux strictement positives.

Exemple : une forme indéfinie

$Q(x, y) = x^2 - y^2$, associée à $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\det \alpha^{(2)} = -1 < 0$ (avec $i = 2$ pair) $\Rightarrow Q$ est indéfinie : $Q(1, 0) = 1 > 0$ mais $Q(0, 1) = -1 < 0$.

Application en gestion : variance d'un portefeuille et convexité des coûts

Pour un portefeuille de poids w et de matrice de variances-covariances Σ , la variance totale $Q(w) = w^\top \Sigma w$ est **toujours semi-définie positive** ($Q(w) \geq 0$ pour tout w , puisqu'une variance ne peut être négative) — et **définie positive** dès lors qu'aucun actif n'est une combinaison linéaire exacte des autres. Plus généralement, une fonction de coût $C(x)$ est **convexe** si et seulement si sa matrice hessienne (chapitre suivant, cours d'analyse mathématique) est **semi-définie positive** en tout point : c'est très exactement le critère de cette section, appliqué à la matrice des dérivées secondes plutôt qu'à une matrice de données. La boucle entre algèbre linéaire et optimisation à plusieurs variables est ainsi bouclée.

Synthèse

L'essentiel du chapitre 7

- $Q(x) = X^T \alpha X$, α symétrique : son signe se lit sur les **valeurs propres** de α (toutes > 0 , < 0 , ≥ 0 , ≤ 0 , ou mélangées).
- La **méthode des mineurs principaux** offre un test pratique, souvent plus rapide que la diagonalisation.
- Cas 2×2 : $a > 0$, $ac - b^2 > 0 \Rightarrow$ définie positive; $ac - b^2 < 0 \Rightarrow$ indéfinie.
- Cette classification est **exactement** celle utilisée pour la matrice hessienne en optimisation à plusieurs variables.

Fin du parcours

Ces sept chapitres – des opérations élémentaires sur les matrices jusqu'aux formes quadratiques – donnent tous les outils d'algèbre linéaire mobilisés ailleurs dans le cursus : optimisation à plusieurs variables, économétrie (moindres carrés, multicolinéarité), analyse de portefeuille, modèles entrées-sorties.