

# Algèbre linéaire

## Chapitre 6 : Diagonalisation des matrices carrées



---

Jaouad Madkour

Faculté d'Économie et de Gestion de Tanger · 27 août 2026

Avant de commencer

Valeurs propres, vecteurs propres

Diagnostiquer la diagonalisabilité

Synthèse

Avant de commencer

---

### Pourquoi ce chapitre ?

Un système linéaire carré  $AX = B$  où  $A$  est **diagonale** se résout trivialement, équation par équation. La diagonalisation cherche à ramener une matrice carrée quelconque à cette forme simple — un outil crucial pour l'optimisation à plusieurs variables (chapitre suivant) et pour découpler des dynamiques économiques couplées.

## Valeurs propres, vecteurs propres

---

## Matrices semblables, matrice diagonalisable

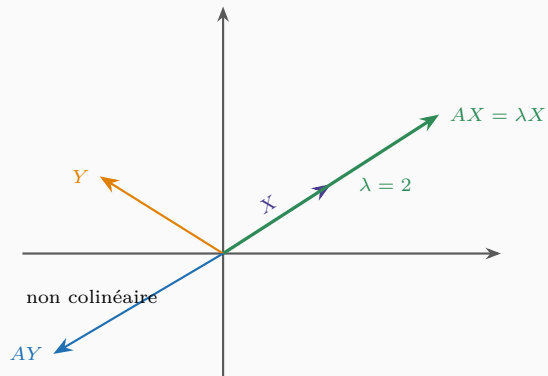
$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont **semblables** s'il existe  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  **inversible** telle que  $B = H^{-1}AH$ ;  $H$  est alors la **matrice de passage**.  $A$  est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

## Vecteur propre, valeur propre

$X \neq 0$  est un **vecteur propre** de  $A$  associé à la **valeur propre**  $\lambda \in \mathbb{R}$  si  $AX = \lambda X$ .

### L'action de $A$ le long d'un vecteur propre

Un vecteur propre est une direction que  $A$  ne fait que **dilater** (ou contracter, ou inverser) d'un facteur  $\lambda$ , sans la faire pivoter. Diagonaliser  $A$ , c'est trouver une base entière formée de telles directions privilégiées.



## Spectre

$\lambda \in \mathbb{R}$  est valeur propre de  $A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$ . Le polynôme  $\det(A - \lambda I_n)$ , de degré  $n$ , est le **polynôme caractéristique** de  $A$ ; l'équation  $\det(A - \lambda I_n) = 0$  est son **équation caractéristique**. L'ensemble de ses solutions **complexes** est le **spectre** de  $A$ , noté  $S_A$ . La **multiplicité algébrique** d'une valeur propre est sa multiplicité comme racine de cette équation.

## Propriétés du spectre

- $A$  et  $A^T$  ont le même spectre.
- Si  $A$  est inversible, 0 n'est pas valeur propre de  $A$ , et  $\lambda^{-1}$  est valeur propre de  $A^{-1}$  pour toute valeur propre réelle  $\lambda$  de  $A$ .
- Des matrices **semblables** ont **toutes le même spectre**.

## Diagnostiquer la diagonalisabilité

---

## Cas des matrices diagonales et symétriques

Les valeurs propres d'une matrice **diagonale** sont exactement ses éléments diagonaux. Toute matrice **symétrique** est diagonalisable — un résultat qui sera central au chapitre 7.

## Conditions de diagonalisabilité

- **Condition nécessaire** : si  $A$  est diagonalisable, toutes ses valeurs propres sont **réelles**.
- **Condition suffisante** : si le spectre de  $A$  comporte  $n$  valeurs propres réelles **distinctes**,  $A$  est diagonalisable.
- **Condition nécessaire et suffisante** (cas général) :  $A$  est diagonalisable  $\iff$  toutes ses valeurs propres sont réelles **et**, pour toute valeur propre  $\lambda$  de multiplicité algébrique  $m_\lambda \geq 2$ , le système  $AX = \lambda X$  admet une infinité de solutions à  $m_\lambda$  **paramètres** (la dimension de l'espace propre égale la multiplicité algébrique).

## Conditions nécessaires et suffisantes (suite)

### La méthode en trois étapes

1. Calculer le spectre (racines de  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ).
2. Si une valeur propre est complexe non réelle : **pas diagonalisable**. Si toutes sont réelles et distinctes : **diagonalisable**.
3. Sinon, pour chaque valeur propre de multiplicité  $\geq 2$ , comparer la dimension de l'espace des solutions de  $AX = \lambda X$  à sa multiplicité algébrique.

Si  $A$  est diagonalisable, la matrice diagonale semblable s'obtient en plaçant simplement les valeurs propres sur la diagonale (avec répétition).

### Exemple : un cas diagonalisable

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  (symétrique). Le bloc  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  a pour valeurs propres 2 et 4 (trace 6, déterminant

8). Le spectre de  $A$  est donc  $\{2, 2, 4\}$  :  $\lambda = 2$  a une multiplicité algébrique 2, et son espace propre — engendré par  $(1, 0, 0)^\top$  et  $(0, 1, -1)^\top$  — est bien de dimension 2.  $A$  est diagonalisable, semblable à  $\text{diag}(2, 2, 4)$ .

### Exemple : un cas non diagonalisable

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  a pour unique valeur propre  $\lambda = 2$ , de multiplicité algébrique 2. Mais

$AX = 2X \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \iff y = 0$  : l'espace propre, engendré par  $(1, 0)^\top$  seul, est de **dimension 1** — inférieure à la multiplicité algébrique.  $A$  n'est **pas** diagonalisable.

### Application en gestion : découpler une dynamique de prix

Les prix de  $n$  actifs liés,  $p_t = (p_{1,t}, \dots, p_{n,t})^\top$ , évoluent selon  $p_t = A \hat{p}_{t+1} + \varepsilon_t$ , où  $\hat{p}_{t+1}$  regroupe les anticipations et  $A$  est **symétrique** — donc diagonalisable :  $A = H^{-1}DH$ ,  $D$  diagonale. En posant  $\tilde{p}_t = Hp_t$ , le système devient  $\tilde{p}_t = D\hat{\tilde{p}}_{t+1} + \tilde{\varepsilon}_t$  : chaque composante  $\tilde{p}_{i,t} = d_i \hat{\tilde{p}}_{i,t+1} + \tilde{\varepsilon}_{i,t}$  évolue **indépendamment** des autres. La diagonalisation transforme ainsi  $n$  prix couplés en  $n$  dynamiques univariées indépendantes — un principe identique à l'analyse en composantes principales.

## Synthèse

---

## L'essentiel du chapitre 6

- $AX = \lambda X$  ( $X \neq 0$ ) :  $X$  vecteur propre,  $\lambda$  valeur propre ;  $\lambda$  est racine de  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .
- Toute matrice symétrique est diagonalisable ;  $n$  valeurs propres réelles distinctes  $\Rightarrow$  diagonalisable.
- Cas général : diagonalisable  $\iff$  valeurs propres réelles et, pour chacune, dimension de l'espace propre = multiplicité algébrique.

## Vers le chapitre 7

Les valeurs propres d'une matrice **symétrique** permettent de trancher, en un clin d'œil, le signe de la forme quadratique qu'elle définit — l'outil déterminant pour classer les points critiques en optimisation à plusieurs variables.